**Ejercicios de topología on line**

**Tema 1**

# Ejercicio 26

Un espacio topológico es *regular* cuando es posible separar todo conjunto cerrado de cualquiera de sus puntos exteriores.

Sea un cerrado y . Como es un cerrado, entonces es un abierto que contiene a , existe un entorno cerrado de , . Sea que es abierto, y que además que contiene a , , verificando que . En consecuencia, el espacio es regular.

# Ejercicio 27

Un espacio topológico es *normal* cuando dado cualquier par de cerrados, y , , existen dos entornos, y, tal que .

La familia de abiertos es

La familia de cerrados está construida por los conjuntos complementarios de los anteriores:

Por tanto, dos cerrados distintos del vacío su intersección es siempre distinta del vacía, es decir, siempre se intersecan, se tiene que el espacio es normal.

# Ejercicio 28

Sea , una base de entornos de es:

Para cualquier entorno de , , , y como , se tiene que

Y como solo tiene un elemento (es finito) es numerable, es cierto para cualquier , el espacio satisface el primer axioma de numerabilidad, es IAN.

Sea la familia es una base de abiertos de la topología. Si el espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces existe numerable.

*Sea , entonces , existe tal que*

Como y son irracionales, , absurdo. Por lo tanto, el espacio NO satisface el segundo axioma de numerabilidad.

**Ejercicio 29**

*Sean , y sean tales que :*

*Caso 1: Si , entonces claramente .*

Caso 2: existen tales que

Por lo tanto, NO es de Hausdorff.

*Sea para , , entonces su complementario es cerrado*

Hay que encontrar dos entornos y tales que . Pero el único abierto que contiene a es , es decir, , para cualquier entorno de . Por lo tanto, NO es regular.

**Tema 2 aplicaciones**

**Ejercicio -6-**

**Se considera con la topología de los divisores, esto es, es base de , con el conjunto de los divisores de . Probar que una aplicación es continua si y solo si respeta la divisibilidad (esto, es si divide a entonces divide a ).**

**Solución**

Si es una aplicación continua en :

*Dado divide a divide a*

Y esto es cierto para todo divisor de y para todo , por lo tanto, respeta la divisibilidad.

Si respeta la divisibilidad, sea y sea que divide a

divide a

**Ejercicio -7-**

**Encontrar una aplicación y un conjunto denso tal que es continua, aunque no sea continua en ningún punto de .**

**Solución**

Sean y que es un subconjunto denso de :

Sea la aplicación restringida en :

*es continua*

*Sea ,*

Por lo tanto, no es continua en , es decir, no sea continua en ningún punto de .

**Ejercicio -8-**

**Probar que las aplicaciones continuas y sobreyectivas aplican conjuntos densos en conjuntos densos. Comprobar que la parte entera conserva los conjuntos densos, aunque no es continua.**

**Solución**

Sea una aplicación continua y sobreyectiva, y sea denso en : .

Como es sobreyectiva: , y como es continua :

Por lo tanto, las aplicaciones continuas y sobreyectivas aplican conjuntos densos en conjuntos densos.

Sea veamos que conserva los conjuntos densos, y sea denso en , .

Pero por otro lado, , se decir, , tomando adherencias, , entonces es denso en .

*Veamos que no es continua, sea*

**Examen tema 2 13-12-2021**

**2.- Sea un espacio topológico. Prueba que es abierto en si y solo si es la topología discreta.**

*Sea abierto en . Sea , existe :*

*Sean e , con , entonces absurdo, se tiene que , y de la misma forma .*

Luego la única posibilidad es que , es decir, se tiene una base de abiertos:

Para cualquier que , se verifica que . Por lo tanto, es la topología discreta.

Sea la topología discreta, una base de abiertos de :

*Y por definición: y una base de :*

*Para cada , donde , es decir, , es decir, y como , en consecuencia, , es abierto.*

**Ejercicio -12-**

**Un conjunto no vacío es simétrico si para cada se cumple . Sea la topología:**

**Demostrar que si es una función impar (es decir, entonces es continua y abierta.**

**Solución**

Veamos que es continua, sea , entonces tiene que ocurrir :

*Si . Si es simétrico:*

Veamos que es abierta, sea , entonces tiene que ocurrir :

*Si . Si es simétrico:*

**Tema 3 conexión y compacidad**

**Ejercicio 1**

**Estudiar conexión, componentes conexas y conexión local del conjunto de :**

**Solución**

Se considera el espacio topológico con la topología inducida en la usual. El conjunto no es conexo, porque tiene más de una componente conexa. Las componentes conexas son: el segmento y los puntos para cada .

*Como la aplicación es un homeomorfismo, entonces el conjunto es homeomorfo a , y como es conexo en , se tiene que es conexo. Y los son puntos aislados son conexos.*

*Sea y supongamos que donde , entonces existe tal que*

*Sea , y se tiene la siguiente descomposición de abiertos:*

*Es decir, no es un conjunto conexo, absurdo, luego .*

Para cada , supongamos

Entonces existe tal que :

Sea , y se tiene la siguiente descomposición de abiertos:

Además

*Es decir, no es un conjunto conexo, absurdo, luego , para cada .*

El conjunto no es conexo, porque tiene más de una componente conexa.

Además, el conjunto tampoco es localmente conexo.

Sea el punto , y se considera un entorno cualquiera de . Como la sucesión converge a se tiene que:

Además, existe

Y por lo tanto, el entorno tendría más de una componente conexa, es decir, no es conexo.

Por lo tanto, no se puede encontrar un entorno conexo del punto .

**Ejercicio 2**

***Sea , con . Estudiar qué subconjuntos son conexos y cuáles son compactos.***

**Solución**

Todo subconjunto de es conexo. Sea , se sabe que está acotado inferiormente y existe el . Sean verificando:

*Como*

Por lo tanto, es conexo.

Los subconjuntos y se considera un recubrimiento infinito de abiertos:

Si fuera compacto, existe finito, es decir, existe un recubrimiento finito de abiertos:

*Sea , entonces:*

Y como es un conjunto finito, entonces es un conjunto finito.

Los únicos compactos de en son los conjuntos finitos.

**Ejercicio 3**

**En la recta de Sorgenfrey , estudiar si es conexo y si es compacto.**

**Solución**

El conjunto no es conexo en :

Y además, no es la partición trivial.

Por lo tanto, no es conexo.

Ahora, el conjunto no es compacto, sea el recubrimiento de abiertos infinito siguiente:

Supongamos que es compacto, entonces existe un recubrimiento finito:

*Sea :*

*Entonces pero .*

Por lo tanto, no es compacto.

**Ejercicio 4 muy importante**

**Sea y . Estudiar si es conexo y si es compacto.**

**Solución**

Para cada , el segmento es conexo, por ser arcoconexo, y sea la intersección:

Por lo tanto, el conjunto es conexo. Por otro lado, se tiene que

Si un conjunto es conexo y se le añade puntos adherentes, sigue siendo conexo. Es decir:

Como con la topología usual, para que sea compacto tiene que ser cerrado y acotado. Y como , entonces es acotado. Veamos si es cerrado.

Sea , y consideramos la sucesión de puntos siguientes:

Luego , luego no es cerrado, y por lo tanto, no es compacto.

**Ejercicio 5**

**Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas:**

**es homeomorfo a .**

**En un espacio , si es conexo, también lo es .**

**Solución**

**a.- es homeomorfo a .**

Sea y que son conjuntos conexos, por ser arcoconexos. Supongamos que son homeomorfos, es decir, , entonces , absurdo, porque sigue siendo conexo, en cambio, no es conexo, tendría cuatro componentes conexas. FALSO.

**b.- En un espacio , si es conexo, también lo es .**

*FALSO, en , y sea , como son conjuntos conexos y , entonces es conexo.*

*En cambio, , donde , además*

En consecuencia se trata de una partición por abiertos no trivial de , por lo tanto, no es conexo.

Ejercicio 6

Probar que cada par de espacios de conjuntos no son homeomorfos (topología usual):

.

y

***y***

**Solución**

*a.- tiene la topología discreta, , porque entonces*

Supongamos que , entonces sea un homeomorfismo, como , se tendría , absurdo, puesto que los puntos aislados de no son abiertos.

Supongamos que si lo fueran, sea , y que :

Por lo tanto, no son homeomorfos.

b.- Sean y , se tiene que ambos conjuntos no son conexos, por ser unión de dos abiertos disjuntos, pero ambos tienen dos componentes conexas. Supongamos que , cada componente sería homeomorfa a otra componente.

*Supongamos ambos son conexos, por ser arcoconexos, entonces*

Absurdo porque que es conexo, en cambio, , que se trata de una partición de abiertos no trivial, es decir, no es conexo.

*Por lo tanto, , luego , ambos son conexos, por ser arcoconexos, entonces*

Absurdo porque que es conexo, en cambio, , que se trata de una partición de abiertos no trivial, es decir, no es conexo.

En consecuencia, no son homeomorfos.

*y*

Como en los conjuntos compactos son los cerrados y acotados.

Claramente que es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto, compacto en .

En cambio, el conjunto no está acotado, no existe ninguna bola que lo contenga, es decir, no es compacto. Como los homeomorfismos conservan la compacidad, entonces, no son homeomorfos.

**Ejercicio 7**

**Probar que cada par de espacios de conjuntos no son homeomorfos (topología usual):**

***.***

***y***

***y***

***y .***

**Solución**

a.- Se sabe que no es un conjunto compacto porque no es acotado, en . Y el plano proyectivo es compacto al ser cociente de con la relación de los antípodas. Por lo tanto, , no son homeomorfos.

**Ejercicio 15**

**Estudia de forma razonada las siguientes cuestiones:**

**a.- ¿Es cierto que todo subconjunto finito no vacío de un espacio topológico es discreto?**

FALSO. Sea la topología trivial en , los únicos abiertos son y sea que es finito y se tiene que , por lo tanto, no es un subconjunto discreto.

**¿Y si el espacio es metrizable?**

Un espacio metrizable es un espacio topológico que es homeomorfo a un espacio métrico.

VERDADERO. Sea un espacio metrizable, y sea finito. Para ver que es discreto en solo es necesario comprobar que .

*Se considera y se verifica , donde , luego , es decir, , luego es discreto.*

**b.- Sea la recta de . Definamos como ). Analizar si es continua, abierta o cerrada.**

Claramente es continua y abierta.

Luego no es continua, ni abierta. Y como tampoco es continua ni abierta.

Veamos que no es cerrada. Sea cerrado en

**c.- Un aplicación es propia si para cada compacto de se verifica que es compacto en . Probar que si es propia, es de Hausdorff e es compacto, entonces es continua.**

Sea cerrado en , y como es compacto, compacto en y como es propia, es compacto en y como es de Hausdorff, es cerrado en , es decir, es continua.

**Ejercicio 16**

**En se considera la topología dada por**

**a.- Para cada obtener una base de entornos de en .**

Distinguimos dos casos:

Caso I: Sea , entonces es una base de entornos de , ya que sea entorno de : , y se verifica que donde , puesto que , y .

Caso II: Sea , entonces se define , y para cada , es un entorno de , veamos que es base:

*Sea entorno de , , existe , tal que , donde , con , pero como , , existe tal que*

Por lo tanto, es una base de entornos de .

b.- Calcular la clausura y el interior de en . ¿Es denso en ?

*Si , como y , entonces , es cerrado en , luego .*

*Si , se tiene que , para cada , , y sea:*

*Sea si*

*Luego , resumiendo:*

Veamos ahora el conjunto interior.

*Si , entonces , luego .*

*Si , se tiene que para ,, y , es decir, .*

*Sea si*

*Luego , resumiendo:*

**c.- Probad que si es compacto en entonces es compacto en . ¿Es cierto el enunciado recíproco?**

Sea es compacto en , veamos que es compacto en . Se considera un recubrimiento infinito de abiertos de :

Como es compacto en , existe finito tal que:

El recíproco no es cierto, veamos un contraejemplo.

*Sea y además es acotado, luego es compacto en .*

Supongamos es compacto en , como , entonces es compacto en , luego

es compacto en , entonces es finito absurdo.

Supongamos que es compacto, existe finito tal que:

**d.- Probad que si es conexo en entonces con .**

Supongamos que en hay más de un elemento.

Si , existe , es conexo en , como , que es conexo en y también y conexo en , lo que contradice que es conexo entonces de un solo elemento. Absurdo.

*Luego :*

es conexo en es conexo en es conexo en es conexo en es un intervalo

Luego por la densidad de en , los únicos intervalos que no contienen racionales, son los degenerados, .

Y por lo anterior en , como se trata de que es , se tiene que con .

**Ejercicio de entrega**

**Sea . Se define inductivamente por la igualdad:**

**1.- Probar que cada conjunto es unión finita de intervalos cerrados disjuntos de longitud y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a .**

Para ,

Para ,

Para ,

La construcción de los consiste en cada intervalo, se divide en tres partes iguales y se elimina el intervalo abierto central, obteniéndose de forma inductiva que:

Además, se tiene que . Es decir, es unión finita de intervalos cerrados disjuntos de longitud .

***2.- Probar que .***

Para cada , se considera

Es decir

**3.- Probar que es un conjunto compacto no vacío.**

*Como , entonces , es decir, .*

Para cada , es cerrado por ser unión numerable de intervalos cerrados, y es acotado porque está contenido en un conjunto acotado , luego es compacto en .

Como es cerrado por ser intersección numerable de cerrados y que es compacto, entonces es compacto en .

**4.- Probar que es totalmente disconexo (las únicas componentes conexas son puntos).**

Sea una componente conexa, con más de un punto. Sean , y verificando

Entonces existe , es decir, tal que . Consideramos

Es decir, hay una partición de abiertos relativos de no trivial, por lo tanto, no es conexo ¡¡¡¡

Luego las únicas componentes conexas son puntos, es totalmente disconexo.

**Al conjunto se le denomina el conjunto de Cantor.**

**Ejercicio 17**

**Si una aplicación continua, donde es compacto e es de Hausdorff, entonces es compacto en para cada compacto en .**

Sea compacto en ,, ya que es de Hausdorff, es cerrado en , por ser continua, y como es compacto, es compacto en .

**Ejercicio 18**

**Sea donde . En se considera la topología de la que conocemos una base dada por:**

**a.- Decidir si es un espacio de Hausdorff.**

Veamos que para e no se pueden separar por abiertos disjuntos.

*Sean tales que y : existen verificando:*

Es decir, NO es un espacio de Hausdorff.

**b.- Probar que y que es homeomorfo a .**

Como es una base de , entonces es una base .

*Es decir, , luego .*

*Por otro lado , se tiene que*

*, luego*

*Se define*

Claramente es biyectiva.

*Sea la base usual de , entonces*

Por lo tanto, es continua en .

Por lo tanto, es abierta, y se trata de un homeomorfismo, es homeomorfo a .

**c.- Estudiar la conexión en del conjunto .**

*Caso I: Si , sea con y , porque . Y como es conexo en , como ,*

es conexo en es conexo en y como , entonces es conexo.

Caso II: Si . Veamos que en este caso no es conexo.

Hay una partición de abiertos relativos no trivial de , no es conexo.

d.- ¿Es el conjunto cerrado en ? ¿Es compacto en ?

Por lo tanto, no es cerrado en ,

Como y , por el teorema de Heine-Borel, es compacto en es compacto en .

**Ejercicio 19**

**Sea un espacio compacto y infinito. Demostrar que , donde es el conjunto de puntos de acumulación de en .**

*Por reducción al absurdo, supongamos que, entonces*

Se considera y

Como un espacio compacto, existe finito tal que

**Ejercicio 20**

**Sea , estudiar la continuidad de , . Estudiar cuando un subconjunto de es conexo.**

Un base de entornos de es:

*La aplicación es continua en si para todo tal que si entonces ,es decir, .*

Se pretende ver si es creciente en : existe tal que .

Por lo tanto, es continua en los intervalos de la forma .

Sea de conexo, tiene que ser un intervalo. Si no es un intervalo, existen y verificando , entonces:

Hay una partición de abiertos relativos no trivial de no es conexo, absurdo.

*Además, si , y es cerrado, porque*

Por lo tanto, es un conjunto abierto y cerrado en , luego si es un intervalo que contiene a un intervalo de la forma , no es conexo. Luego los únicos conexos de , los intervalos degenerados, es decir, con .

**Ejercicio 21**

***Componentes conexas de y .***

Sea en , como en los conjuntos conexos son los intervalos, luego los intervalos incluidos en , los degenerados, es decir, para cada . Por lo tanto, las componentes conexas son los puntos.

*Sea en , se tiene que:*

Es una partición de de conjuntos disjuntos dos a dos.

Cada uno de los conjuntos es conexo por ser producto de conexos. También es abierto, al ser producto de abiertos. Por lo tanto, tiene tres componentes conexas, que son:

**Ejercicio 22**

**Estudiad la compacidad de . Caracterizar los subconjuntos compactos.**

El espacio no es compacto, sea el recubrimiento infinito de abiertos de :

Si fuese compacto, existe finito:

Por lo tanto, no es compacto.

Una caracterización de los conjuntos compactos en es:

Por ser , entonces todo conjunto infinito tiene como recubrimiento:

Luego si es compacto al extraer uno finito, se concluye con que es finito, absurdo.

Por lo tanto, todo conjunto compacto en tiene que ser finito.

La otra implicación es trivial, todo conjunto finito es compacto.

**Ejercicio 23**

**Sea . En se considera la topología que tiene por base**

**Estudiar la conexión y compacidad de .**

Se tiene que y , por lo tanto se tiene que:

es conexo en es conexo en y como , entonces es conexo.

*Veamos que : Sea con y . Por lo tanto, .*

Veamos que es compacto. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de :

Como , entonces

Se tiene que , luego

Se puede extraer uno finito, existe :

Es decir, es compacto.

**Ejercicio 29**

**En se consideran la familia de subconjuntos**

**a.- Demostrar que es base de una topología sobre .**

*Sean , entonces .*

*Se considera y verifica que:*

*Por lo tanto, es base de una topología sobre .*

**b.- Estudiar si los conjuntos**

***Y* son compactos en *.***

Veamos si es compacto. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de :

*Para cada y :*

Entonces se tiene que

Y como es compacto en , existe finito, tal que:

Es decir*,* es compacto. De la misma forma es compacto.

Veamos si NO es compacto. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de :

Supongamos que es compacto, entonces existe finito:

Donde . Por lo tanto, NO es compacto.

**c.- Calcular las componentes conexas de .**

Veamos si es conexo. Sean , tal que .

Como , entonces: , luego

Se tiene que verificando que y , y como es conexo, entonces .

En consecuencia: .

Es decir, es conexo , y sólo tiene una componente conexa.

**Ejercicio 27**

**a.- Razonar si puede existir una biyección abierta del plano en la esfera .**

Supongamos que existe biyectiva y abierta. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de :

Y como es abierta, , es decir, es un recubrimiento infinito de abiertos de , y como es compacto, entonces existe finito:

Se tiene que es compacto, absurdo, no puede existir una biyección abierta del plano en la esfera .

**b.- Probar que si es base de , entonces las componentes conexas de los elementos de forman otra base de .**

Sea y sea el conjunto de componentes conexas de :

Se considera . Todo , por base de la topología se pone como unión de elementos de :

Es decir, todo se pone como unión de elementos de . Se trata de una base de abiertos de .